Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ____________________

Carnet: ____________ Sección: ______

MA-3111—Primer Parcial, modelo 28-2-2009, 35 %— 9:30 a.m.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE; $a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$u(x)$	$U(z)$
$\alpha u(x) + \beta v(x)$	$\alpha U(z) + \beta V(z)$
$u'_{gen}(x)$	$zU(z)$
$u^{(k)}_{gen}(x)$	$z^k U(z)$
$xu(x)$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x} u(x)$	$U(z-\alpha)$
$u * v(x)$	$U(z)V(z)$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	z^k
$\delta^{(k)}(x-a)$	$z^k e^{-az}$
$H(x)$	$\frac{1}{z}$
$H(x)e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z-\alpha}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(z-\alpha)^k}$
$H(x)\operatorname{sen}(ax)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$H(x)\cos(ax)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$H(x)\operatorname{senh}(ax)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$H(x)\cosh(ax)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$

---

1. (9 puntos) Resuelva el siguiente problema usando transformadas de Lapalace

$$y''(x) + 4y(x) = e^{-2x}$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

Solución
Como siempre el primer paso es reducir el problema a uno con funciones causales

$$u(x) = H(x)y(x), \qquad u'(x) = H(x)y'(x), \qquad u''(x) = \delta(x) + H(x)y''(x)$$
$$u''(x) + 4u(x) = H(x)e^{-2x} + \delta(x)$$

Ahora toca transformar por Laplace:

$$(z^2+4)U(z) = 1 + \frac{1}{z+2} \Rightarrow U(z) = \frac{1}{z^2+4} + \frac{1}{(z^2+4)(z+2)}$$

Ahora antitransformamos

$$\frac{1}{(z^2+4)(z+2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z+2} + \frac{2-z}{z^2+4}\right)$$

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2+4}\right)(x) + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+2} + \frac{2-z}{z^2+4}\right)(x) =$$

$$H(x)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x)\right)$$

Luego la solución final es

$$y(x) = \frac{5}{8}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{8}e^{-2x}$$

Puedes comprobar muy fácilmente que satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, luego hemos hecho las cosas bien.

2. (8 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

calcule el producto de convolución $f * f$

Solución

Este puede hacerse por cálculo directo, pero vamos a realizarlo transformando y antitransformando:

$$f(x) = H(x+1) - H(x-1), \qquad \mathcal{L}(f(x))(z) = (e^{-z} - e^{z})\frac{1}{z}$$

$$\mathcal{L}(f * f)(z) = (e^{-2z} + e^{2z} + 2)\frac{1}{z^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2z} + e^{2z} + 2}{z^2}\right) = H(x+2)(x+2) + (x-2)H(x-2) + 2xH(x)$$

Me gustaria que pasara unos minutos convenciendote de como funciona todo. Haz el problema por cálculo directo, recuerda que $H(x-a) * H(x-b) = (x-a-b)H(x-a-b)$, ¿puedes deducir esta última fórmula?

3. (9 puntos) Calcule la transformada de Laplace inversa de

$$U(z) = \frac{(2-z)e^{-z} + 3z - 1}{z^2}$$

Solución
No hay mucho que hacer:

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(2-z)e^{-z} + 3z - 1}{z^2}\right) = H(x+1)(2x+2-1) + 3H(x) - xH(x) =$$
$$H(x+1)(2x+1) + (3-x)H(x)$$

4. (12 ptos.) Desarrolle en serie de Fourier la función $2\pi-$periódica, dada en $[0, 2\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \in [0, \pi] \\ 1 & ; \; x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

y usando la serie hallada calcule las sumas de las series:
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Solución
Primero calculamos los coeficientes de Fourier según la fórmula

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{\cos(n\pi) - \cos(2n\pi}{n\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$$

Es decir $b_{2k} = 0$ y $b_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)\pi}$, la serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{2k+1}$$

Para responder la parte a) podemos evaluar la serie en $x = \pi/2$, en ese caso $\operatorname{sen}((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$ y por tanto

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Con el fin de responder a la segunda pregunta usamos la fórmula de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \pi \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$